KIT-Fakultät für Informatik
Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H^2T)

Robotik I im WS 2017/18

1. Übungsblatt

Termin: 30. Oktober 2017

Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour
Dipl.-Inform. Peter Kaiser
M. Sc. Fabian Paus
Adenauerring 2, Geb. 50.20
Web: http://h2t.anthropomatik.kit.edu

Aufgabe 1 (Euler- und RPY-Winkel, Quaternionen)

Gegeben sei eine allgemeine 3×3 Rotationsmatrix R

$$R = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die zur Rotationsmatrix R gehörenden $ZX'Z''$-Eulerwinkel.
2. Berechnen Sie die zur Rotationsmatrix R gehörenden RPY-Winkel (XYZ-Konvention).
3. Gegeben sei die Rotationsmatrix R_1

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.48 & 0.64 & 0.6 \end{pmatrix},$$

   berechnen Sie das Quaternion q welches die durch R_1 beschriebene Rotation beschreibt.

Aufgabe 2 (Homogene Matrizen)

Gegeben seien die homogene Transformationsmatrix $T \in SE(3)$ und der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)^T$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Welche Transformation beschreibt T?
2. Wenden Sie die durch T beschriebene Transformation auf $\boldsymbol{v}$ an.
3. Bestimmen Sie die zu T inverse Transformationsmatrix T^{-1}.

Aufgabe 3 (Verkettung von Koordinatentransformationen)

Gegeben sei ein Serviceroboter mit holonomer Plattform. Die x-Achse seines lokalen Koordinatensystems zeige in Fahrtrichtung und die z-Achse vom Boden aus in die Luft. Die y-Achse sei entsprechend der rechten Hand Regel ergänzt. Die initiale Pose des Roboters im Bezugskoordinatensystem (BKS) laute:

$$T_{init} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dem Serviceroboter werden nacheinander die folgenden Kommandos zugesandt:

1. Drehe um die z-Achse um 90°
2. Fahre 4 Einheiten geradeaus
3. Fahre 2 Einheiten geradeaus und 3 Einheiten seitwärts und drehe anschließend um die z-Achse um $-45°$

Berechnen Sie die durch die einzelnen Kommandos implizierten Transformationsmatrizen, sowie die finale Pose des Serviceroboters im BKS.

Aufgabe 4 (Distanz von Posen)

Für einen End-Effektor seien eine aktuelle Pose T_{TCP} und eine Zielpose T_{Goal} gegeben:

$$T_{TCP} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{Goal} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Translations- und Rotationsdifferenz zwischen T_{TCP} und T_{Goal}.

Aufgabe 5 (Quaternionen)

Gegeben seien der Punkt $\boldsymbol{p} = (5, 1, 7)^T$, der Vektor $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)^T$ und der Winkel $\phi = 90°$.

1. Stellen Sie $\boldsymbol{p}$ als Quaternion $\boldsymbol{v}$ dar.
2. Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\boldsymbol{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel ϕ um die Achse $\boldsymbol{a}$ beschreibt, sowie das zu $\boldsymbol{q}$ konjugierte Quaternion $\boldsymbol{q}^*$.
3. Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{p}$ mit $\boldsymbol{q}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}'$.
4. Gegeben seien die beiden Rotationsquaternionen $\boldsymbol{q}_1 = (cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_1 sin\frac{\pi}{2})$ und $\boldsymbol{q}_2 = (cos\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{a}_2 sin\frac{\pi}{2})$ mit $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0)^T$ und $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$.

   Stellen Sie die direkte Formulierung der SLERP Interpolation zwischen $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ in Abhängigkeit des Parameters $t \in [0, 1]$ auf und geben Sie das Interpolationsergebnis für $t = \frac{1}{2}$ an.

Aufgabe 6 (Quaternionen)

Zeigen Sie dass der Raum der Einheitsquaternionen $\mathbb{S}^3$ eine Untergruppe der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist.

Hinweis: G ist genau dann eine Gruppe $(G, \cdot)$ wenn gilt:

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$